Kapitel 1 - Einführung

I. Gesetze von De Morgan

i) $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$

ii) $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$

II. Russell-Paradoxon (naive Mengenlehre $\lightning$)

Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Dann gilt: $M \in M \Rightarrow M \notin M \Rightarrow M \in M$ $\lightning$

III. Verknüpfungen von Funktionen

i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$ (Assoziativität)

ii) $h \circ g \neq g \circ h$ (Nicht-Kommutativität): $h: x \mapsto x^2$, $g: x \mapsto 2$ $\Rightarrow$
$h \circ g: x \mapsto 4$; $g \circ h: 2$

iii) f, g injektiv / surjektiv / bijektiv $\Rightarrow$ $f \circ g, g \circ f$ inj. / surj / bij.

iv) g ist surjektiv bzw f ist injektiv, falls $g \circ f$ surjektiv bzw. injektiv ist.

IV. Urbilder von Funktionen

- Def.: $f^{-1}(B) := \{x \in A \mid f(x) \in B\}$; $f: A \to B$; $A^{(i)} \subseteq X$, $B^{(i)} \subseteq Y$

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ii) $B \supseteq f(f^{-1}(B))$

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

v) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

vi) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ [Gleichheit bei Injektivität von f]

V. Hilbert Hotel

- Veranschaulichung der abzählbaren Unendlichkeit (Cantor'sches I. Diagonalarg.)
- Überabzählbar: Partybus (Cantor'sches II. Diagonalargument: Binärzahlenflip)

VI. Peano-Axiome

i) $\exists 1 \in \mathbb{N}$ (ausgezeichnetes Element) $\wedge$ $\exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \nu$ inj. $\wedge$ $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ (Nachfolgerfunktion)

ii) Induktionsaxiom: $A \subseteq \mathbb{N} : (1 \in A \wedge (n \in A \to \nu(n) \in A)) \to A = \mathbb{N}$

VII. Äquivalenzrelationen

- Def. Relation: $\mathcal{R}$ ist n-stellige Relation auf $\mathbb{K} \Leftrightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathbb{K}^n$

i) $\forall x \in X : xRx$ (Reflexivität)

ii) $\forall x, y \in X : xRy \to yRx$ (Symmetrie)

iii) $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \to xRz$ (Transitivität)

- Äquivalenzklasse $[x]_R := \{y \in X \mid yRx\}$
- Quotientenmenge $X/_R := \{[x]_R \mid x \in X\}$

VIII. Kardinalität

i) endlich: $|X| < \infty$

ii) abzählbar unendlich: $|X| = \infty \wedge \exists f : \mathbb{N} \to X : f$ bij.

iii) überabzählbar unendlich: $|X| = \infty \wedge \nexists f : \mathbb{N} \to X : f$ bij.

IX. Diverse Beweisprinzipien

i) Widerspruchsbeweis

ii) Kontraposition

iii) Induktion

iv) Schubfachprinzip

v) Problemverlagerung mittels Bijektion

vi) Matroschka-Beweis

Kapitel 2 – Die reellen Zahlen

I. Axiome eines vollständig angeordneten Körpers

i) Körperaxiome:

Axiome einer (kommutat.) Gruppe:

- $\forall x,y,z \in M: (x +_K y) +_K z = x +_K (y +_K z)$ [Assoziativität $+_K$]
- $\exists 0 \in M\ \forall x \in M: x +_K 0 = 0 +_K x = x$ [Nullelement bzgl. $+_K$]
- $\forall x \in M\ \exists y \in M: x +_K y = 0$ [Inverses bzgl. $+_K$]

- $\forall x,y \in M: x +_K y = y +_K x$ [Kommutativität $+_K$]
- $\forall x,y,z \in M: (x \cdot_K y) \cdot_K z = x \cdot_K (y \cdot_K z)$ [Assoziativität bzgl. $\cdot_K$]
- $\exists 1 \in M\ \forall x \in M: 1 \cdot_K x = x$ [Nullelement bzgl. $\cdot_K$]
- $\forall x \in M\ \exists y \in M: x \cdot_K y = 1$ [Inverses bzgl. $\cdot_K$]
- $\forall x,y \in M: x \cdot_K y = y \cdot_K x$ [Kommutativität $\cdot_K$]

~ Kompatibilität $+_K$ und $\cdot_K$ ~

- $\forall x,y,z \in M: x \cdot_K (y +_K z) = x \cdot_K y +_K x \cdot_K z$ [Distributivität]

ii) Anordnungsaxiome

Ordnungsaxiome:

- $\forall x \in M: x \leq_K x$ [Reflexivität $\leq_K$]
- $\forall x,y \in M: (x \leq_K y \wedge y \leq_K x) \rightarrow x = y$ [Antisymmetrie $\leq_K$]
- $\forall x,y,z \in M: (x \leq_K y \wedge y \leq_K z) \rightarrow x \leq_K z$ [Transitivität $\leq_K$]

totale / lineare Ord.:

- $\forall x,y \in M: x \leq_K y \vee y \leq_K x$ [Linearität $\leq_K$]

iii) Axiome der Kompatibilität von $+_K, \cdot_K$ mit $\leq_K$

- $\forall x,y,z \in M: x \leq_K y \rightarrow (x +_K z \leq_K y + z)$ [Komp. $+_K$ und $\leq_K$]
- $\forall x,y,z \in M: (0 \leq_K x \wedge 0 \leq_K y) \rightarrow 0 \leq_K x \cdot_K y$ [Komp. $\cdot_K$ und $\leq_K$]

iv) Vollständigkeitsaxiom

- $\forall X,Y \subseteq M: (X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \wedge \forall x \in X\ \forall y \in Y: x \leq_K y) \rightarrow$
  $\rightarrow (\exists c \in M\ \forall x \in X\ \forall y \in Y: x \leq_K c \leq_K y)$

II. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

- Def. Induktive Menge $M \subseteq \mathbb{R}$: i) $1 \in M$ ii) $\forall x \in \mathbb{R}: x \in M \rightarrow (x+1) \in M$
- Def. $\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subseteq \mathbb{R},\\ \text{ind.}}} M$

I) Anordnung von $\mathbb{N}$

- $\forall n \in \mathbb{N}: n = 1 \lor (n-1) \in \mathbb{N}$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}: (m \leq n \leq m+1) \rightarrow (n = m \lor n = m+1)$

II) Wohlordnung von $\mathbb{N}$

$\forall M \subseteq \mathbb{N}\ \exists!\, n_0 \in M\ \forall n \in M: n \geq n_0$

III. Die ganzen Zahlen

- Def.: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Abgeschlossenheit unter + und • :

  $\forall m, n \in \mathbb{Z}: m+n \in \mathbb{Z} \land m \cdot n \in \mathbb{Z}$

  Bew.: + mittels Induktion über $A(n) \equiv \forall m \in \mathbb{N}: m+n \in \mathbb{N}$ erweitert auf $\mathbb{Z}$

  - $m \cdot n = (-m)(-n) \in \mathbb{N}$; $(-m)n = m(-n) \in -\mathbb{N}$

IV. Die rationalen Zahlen

- Def.: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ $(\subseteq \mathbb{R})$
- $\mathbb{Q}$ ist (Unter-) Körper (von $\mathbb{R}$)

V. Die komplexen Zahlen

- Def.: $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Def. $+_c$: $(a_1 + b_1 i) +_c (a_2 + b_2 i) := (a_1 +_{\mathbb{R}} a_2) + (b_1 +_{\mathbb{R}} b_2) i$
- Def $\cdot_c$: $(a_1 + b_1 i) \cdot_c (a_2 + b_2 i) := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +_c, \cdot_c, 0+0i, 1+0i)$ ist Körper
- Komplexe Konjugation $\overline{z}$ zu $z = a+bi \in \mathbb{C}$: $\overline{z} := a - bi$
  - i) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$; $z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  - ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

VI. Intervalle

- beschränkt $(a, b \in \mathbb{R})$
  - $\nearrow$ abgeschlossen $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  - $\searrow$ offen $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- unbeschränkt $(a \in \mathbb{R})$
  - $\nearrow$ abgeschlossen $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
  - $\searrow$ offen $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

· Def. δ-Umgebung von x: $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \mathbb{R}$

VII. Absolutbetrag

i) $\forall x,y \in \mathbb{R}: |x+y| \leq |x|+|y|$

ii) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

iii) Def $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}$: $|x+yi| := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+yi)\cdot\overline{(x+yi)}}$

iv) Cauchy-Schwarz auf $\mathbb{C}$: $z := x_1+y_1 i$, $w := x_2+y_2 i$: $x_1x_2+y_1y_2 \leq |z||w|$

Bew.: $(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leq (x_1x_2+y_1y_2)^2 + (x_2y_1-x_1y_2)^2 = |z|^2|w|^2$

VIII. Offene / Abgeschlossene Teilmengen

· Def.: $A \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}: \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$

$A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A^c \subseteq \mathbb{R}$ offen

$A \subseteq \mathbb{C}$ offen $\Leftrightarrow \forall z \in A\ \exists r > 0 \in \mathbb{R}: B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\} \subseteq U$

$A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A^c \subseteq \mathbb{C}$ offen

IX. Maximum und Supremum

· Def.: $x_0 = \max(X) \Leftrightarrow x_0 \in X \wedge \forall x \in X: x \leq x_0$

$x_0 = \min(X) \Leftrightarrow x_0 \in X \wedge \forall x \in X: x \leq x_0$

$s_0 = \sup(X) \Leftrightarrow \forall x \in X: x \leq s_0 \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: s_0 - \varepsilon < x$

$i_0 = \inf(X) \Leftrightarrow \forall x \in X: x \geq i_0 \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: s_0 + \varepsilon > x$

i) Existenz des Supremums: $\exists s_0 = \sup(X) \Leftrightarrow X$ nicht-leer $\wedge$ X beschränkt (oben)

Bew.: Vollständigkeitsaxiom $(X, S := \{s \in \mathbb{R} \mid s$ ist obere Schranke von $X\})$

ii) Supremum unter Streckung: $\sup(cX) = c \cdot \sup(X)$

Bew.: $x \leq s_0 \Rightarrow c\cdot x \leq c \cdot s_0 \wedge s_0 - \varepsilon \leq x \Rightarrow c\cdot s_0 - \underbrace{c\cdot\varepsilon}_{\varepsilon'} \leq c \cdot x$

iii) Supremum unter Summen: $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$

Bew.: $(x \leq s_0 \wedge y \leq t_0) \Rightarrow x+y \leq s_0+t_0 \wedge x > s_0 - \varepsilon \wedge y > t_0 - \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y > s_0 + t_0 - (\varepsilon+\delta) = s_0 + t_0 - \varepsilon'$

iv) Uneigentliche Werte:

· Def.: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$

· Def.: $\sup(X) = +\infty$ für X nicht beschränkt

$\sup(X) = -\infty$ für X leer

$\inf(X) = -\infty$ für X nicht beschränkt

$\inf(X) = +\infty$ für X leer

X. Das Archimedische Prinzip

i) Jede nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum

ii) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists!\, n \in \mathbb{Z}: n \leq x < n+1$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$

Bew.: i) $\exists \sup(X \subseteq \mathbb{Z}) =: s_0 \wedge s_0 - 1 < n_0 \leq s_0 < n_0 + 1 \Rightarrow n_0 = s_0$

ii) $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ hat max (nach (i)) $\wedge\ n := \max(M) : n+1 > x$ (da $(n+1) \notin M$)

iii) $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R} < n$ (nach (ii) bzw. Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$)

- Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R}\, \exists r \in \mathbb{Q}: a < r < b \quad (a \neq b,\ a < b)$

  Bew.: $\exists m \in \mathbb{N}: \frac{1}{m} < b - a$ (AP(iii)) $\wedge\ \exists n \in \mathbb{Z}: \frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}$ (AP(ii))

XI. Häufungspunkte einer Menge

- Def.: $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist HP $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A: |a - x_0| < \varepsilon$
- $A \subseteq \mathbb{R}$ endlich $\Rightarrow$ A hat keinen HP
- Existenz eines HP: $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\wedge\ |A| \geq \omega \Rightarrow \exists x \in A: x$ ist HP

  Bew.: $X = \{x \in A \mid |(-\infty, x] \cap A| < \infty\} \Rightarrow |(x_0 := \sup(X) - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)| = \infty$
- Charakterisierung: $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist HP $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : |A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)| = \infty$

XII. Intervallschachtelungsprinzip

- Beh.: $(\forall n \in \mathbb{N}: I_n = [a_n, b_n] \wedge (m \leq n \Rightarrow I_m \supseteq I_n)) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\sup(a_n), \inf(b_n)] \neq \emptyset$
- Bew.: $\bar{a} := \sup(a_n) \leq \inf(b_n) =: \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$

XIII. Cantor-Menge

- Def.: $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ mit $C_n := \begin{cases} [0,1] & n = 0 \\ \frac{1}{3} C_{n-1} \cup \left(\frac{1}{3} C_{n-1} + \frac{2}{3}\right) & n \geq 1 \end{cases}$
- Cantor-Menge ist überabzählbar.

  Bew.: $f: x \in C \mapsto a(x) \in \{L, R\}^{\mathbb{N}_0}$; 2. Cantor'sches Diagonalargument (Binärflipping)

Kapitel 3 - Funktionen und die reellen Zahlen

I. Summation

· Def.: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i := \begin{cases} a_1 & | n = 1 \\ a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & | n > 1 \end{cases}$

i) Indexverschiebung: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}$

ii) Rechenregeln: · $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

· $\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$

iii) Teleskopsumme: $\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m$

iv) Abel-Summation: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) \cdot (b_k - b_{k+1})\right)$

Bew.: Terme auf rechter Seite kürzen

v) Verallgemeinerte Dreiecksungleichung: $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

vi) Geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & | q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & | q \neq 1 \end{cases}$

Bew.: Induktion über n

II. Produkte

· Def.: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i := \begin{cases} a_1 & | n = 1 \\ a_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} & | n > 1 \end{cases}$

i) Indexverschiebung: $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$

ii) Rechenregeln: · $\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{j=m}^{n} b_j$

· $\prod_{k=m}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \prod_{k=m}^{n} a_k$

iii) Teleskopprodukt: $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$ $[a_i \neq 0]$

III. Bernoulli'sche Ungleichung

· Beh.: $\forall a \in \mathbb{R}_{\ge -1}\ \exists n \in \mathbb{N}_0 : (1+a)^n \ge 1 + na$

· Bew.: $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \ge \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k = 1 + na$

$n = 0$: $(1+a)^0 = 1 \ge 1 + 0 \cdot a = 1$

IV. Polynome

- Def.: $\sum_{k=0}^{n} a_k T^k \quad | n \in \mathbb{N}_0$

i) Unterscheidung von Polynom und Polynomfunktion im Allgemeinen

Bsp.: $f: a \in \mathbb{F}_2 \mapsto a^3 + a + 1 \in \mathbb{F}_2$, $g: a \in \mathbb{F}_2 \mapsto 1 \in \mathbb{F}_2$

ii) Bijektion Polynom $\leftrightarrow$ Polynomfunktion auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$

Bew.: $\forall z: f_1(z) = f_2(z) \rightarrow \forall z: g(z) := f_1(z) - f_2(z) = 0 \rightarrow f_1(T) = f_2(T)$

$[f(T)$ nicht konstant $\rightarrow \forall M > 0 \; \exists R \geq 1 \; \forall z: |z| \geq R \rightarrow f(z) \geq M]$

iii) Polynomdivision

- Def.: $\forall d, f \in \mathbb{C}[T]: d \neq 0 \; \exists q, r \in \mathbb{C}[T]: \deg(r) < \deg(d) \wedge f = q \cdot d + r$
- Bew.: $\deg(r) \geq \deg(d) \Rightarrow d \mid r$

iv) Fundamentalsatz der Algebra: $\forall f \in \mathbb{C}[T]: \deg(f) \neq 0 \; \exists x_0 \in \mathbb{C}: f(x_0) = 0$

v) Anzahl der Nullstellen: $\forall f \neq 0 \in \mathbb{C}[T]$: x_0 ist Nullstelle $\Leftrightarrow (T-z) \mid f(T)$

- Bew.: $f(T) = (T-z) \cdot f'(T)$; $f(T) = f(T) - f(z) \overset{\text{heraus heben}}{\Longrightarrow} (T-z) \mid f(T) - f(z) \Rightarrow (T-z) \mid f(T)$

vi) Koeffizientenvergleich: $\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall f, g \in \mathbb{C}[T]: ((\exists z_i: 0 \leq i \leq n \in \mathbb{N} \wedge ((z_j = z_k) \rightarrow j = k):$

$f(z_i) = g(z_i)) \wedge \deg(g), \deg(f) \leq n) \rightarrow g = f$

- Bew.: $h \in \mathbb{C}[T] := f(T) - g(T) \rightarrow h$ hat $n+1$ Nullstellen $\rightarrow \deg(h) = -\infty ; h = 0 \overset{v)}{\rightarrow} f = g$

vii) Lagrange-Interpolation: $\forall (z_i, w_i) \in \mathbb{C}^2 \; \exists f \in \mathbb{C}[T]: f(z_i) = w_i$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z_k - z_j)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z - z_j)$$

- Bew.: $q_k(z) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z - z_j)$

$$p_k(z) := q_k(z_k)^{-1} \cdot q_k(z) \Rightarrow p_k(z_l) = \begin{cases} 1 & | \; l = k \\ 0 & | \; l \neq k \end{cases}$$

V. Algebraische und transzendente Zahlen

- Def.: $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch $\Leftrightarrow \exists f \neq 0 \in \mathbb{Q}[x]: f(\alpha) = 0$ $\quad$ [Bsp.: $i: x^2 + 1$, $\sqrt{2}: x^2 - 2$]
- Def.: $\overline{\mathbb{Q}} := \{ r \in \mathbb{C} \mid r$ ist algebraisch$\}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$; „algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$"
- Def.: $\{ t \in \mathbb{C} \mid t$ ist nicht algebraisch$\}$ =: Menge der transzendenten Zahlen

VI. Der Binomialkoeffizient

- Def. Fakultät: $n! := \prod_{k=1}^{n} k$; $0! := 1$
- Def. Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

i) Kardinalität der Menge der Permutationen einer endlichen Menge:

$| S_n := \{ \sigma \mid \sigma$ bij. Funktion $\wedge \; \sigma: \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0 \} \rightarrow \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0 \} \} | = n!$

· Bew. (Induktion): $|S_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |S_n| = (n+1)!$ $\left[\underset{1\le i\le n+1}{F} : (n+1) \mapsto i,\ \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n+1\} \setminus \{i\} \right]$

II) Additionseigenschaften des Binomialkoeffizienten : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

· Bew. : $\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(k+n-k+1)\,n!}{k!\cdot(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\cdot((n+1)-k)!}$

III) Pascal'sches Dreieck und kombinatorische Bedeutung

· $\forall n,k \in \mathbb{N}_0 : 0 \le k \le n : \binom{n}{k} \cong$ k-elementige Teilmengen von $\{x \in \mathbb{N} \mid x \le n\}$

· Bew.: PD / Induktion: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; (II)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\ 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1 \end{array}$$

IV) Der binomische Lehrsatz : $(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k$

· Bew. (Ind.): $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k+1} z^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k+1} z^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} w^{n-k+1} z^k\right) + z^{n+1} =$$

$$\overset{\text{II)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} w^{(n+1)-k} z^k$$

VII) Summe von Binomialkoeffizienten : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

· Bew. (Ind, PD): $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) \cdot 2 = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$

VIII) Multinomialtheorem : $\forall z_i \in \mathbb{C} : i \le d \in \mathbb{N}\ \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d :$

$$n = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \ \wedge\ \binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^{d} \alpha_i!} \ \wedge\ z^\alpha := \prod_{i=1}^{d} z_i^{\alpha_i} :$$

$$\left(\sum_{i=1}^{d} z_i\right)^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = n} \binom{n}{\alpha} z^\alpha \qquad [\text{Bew.: IV)} \wedge \text{Ind. nach } d]$$

IX) Summen von Potenzen : $\forall p(T) \in \mathbb{Q}[T] : LK(p) = c \wedge deg(p) = d\ \exists P(T) \in \mathbb{Q}[T]:$

$$deg(P) = d+1 \wedge LK(P) = \frac{c}{d+1} : \sum_{k=1}^{n} p(k) = P(n) \quad [n \in \mathbb{N}]$$

· Bew. (Ind. d): $T^{d+2} - (T-1)^{d+2} \overset{\text{IV)}}{=} (d+2)\,T^{d+1} + f(T);\ n^{d+2} \overset{\text{I.III)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{d+2} - (k-1)^{d+2}\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((d+2)\,k^{d+1} + f(k)\right) = (d+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{d+1} + F(n) \to \sum_{k=1}^{n} k^{d+1} = \frac{n^{d+2} - F(n)}{d+2};$$

$$\forall p(T) \in \mathbb{Q}[T]\ \exists q : q(T) = p(T) - c \cdot T^{d+1};\ \sum_{k=1}^{n} p(k) = \sum_{k=1}^{n} q(k) + c \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{d+1} =$$

$$= Q(n) + \frac{c}{d+2}\left(n^{d+2} - F(n)\right) =: P(n)$$

X) Summe von Binomialkoeffizienten : $\forall d \in \mathbb{N}_0\ \forall p_d(x) \in \mathbb{Q}[T] : LK(p_d) = \frac{1}{d!} \wedge p_d(\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < d\}) = 0 \wedge deg(p_d) = d : \ p_d(n) = \binom{n}{d} \wedge$

$$\sum_{k=0}^{n} p_d(k) = p_{d+1}(n+1)$$

· Bew. : Pascal'sches Dreieck; Ind.: $p_0(n) = p_n(n) = 1;\ p_{d+2}(n+2) = \frac{(n+2)!}{(d+2)!\cdot(n-d)!} \overset{\text{II)}}{=} \binom{n+1}{d+2} + \binom{n+1}{d+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{d+1}(k) + p_{d+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} p_{d+1}(k)$$

VI. Reellwertige Funktionen

- Def.: $\mathcal{F}(D) := \{f \mid f: D \to \mathbb{R}\}$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$, bzw. kommutativer Ring mit Eins
- Def.: $f \leq g \iff \forall x \in D: f(x) \leq g(x)$ [Ordnungsrelation]
- Def. <u>Beschränktheit</u>: f beschränkt $\iff f(D)$ beschränkt $\iff \exists M\, \forall x: |f(x)| \leq M$
- Def. <u>Monotonie</u>: i) f monoton wachsend $\iff \forall x,y \in D: x \leq y \to f(x) \leq f(y)$
  ii) f monoton fallend $\iff \forall x,y \in D: x \leq y \to f(x) \geq f(y)$
  iii) f monoton $\iff f$ monoton wachsend $\vee$ f monoton fallend
  iv) streng monoton: ersetze „$\leq$" durch „$<$" in i), ii), iii)
- Def. <u>Stetigkeit</u>: i) f stetig bei $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \to$
  $\to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
  ii) f stetig $\iff \forall x_0 \in D\, \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

i) <u>Stetigkeit unter Einschränkung</u>: $\forall D' \subseteq D\, \forall f \in \mathcal{F}(D): f$ stetig $\to f|_{D'}$ stetig

ii) <u>Stetigkeit unter Addition und Multiplikation</u>: $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D): f_1, f_2$ stetig bei x_0
$\to f_1 + f_2,\ f_1 \cdot f_2$ stetig bei x_0

- Bew.: $\oplus$ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; $|x - x_0| < \delta \to |f_1 + f_2(x) - f_1 + f_2(x_0)| \leq |f_1(x) - f_1(x_0)| +$
  $+ |f_2(x) - f_2(x_0)| < \varepsilon$

  $\odot$ $|f_1 \cdot f_2(x) - f_1 \cdot f_2(x_0)| < |f_1 \cdot f_2(x) - f_1(x) f_2(x_0) + f_1(x) f_2(x_0) - f_1 \cdot f_2(x_0)| \overset{\Delta\text{-U.}}{\leq}$
  $\leq |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - f_2(x_0)| + |f_2(x_0)| \cdot |f_1(x) - f_1(x_0)|$; $|x - x_0| < \delta_1 \to |f_1(x) - f_1(x_0)| <$
  $< \dfrac{\varepsilon}{2(|f_2(x_0)| + 1)}$; $|x - x_0| < \delta_2 \to |f_2(x) - f_2(x_0)| < \min\left\{1; \dfrac{\varepsilon}{2(f_1(x_0) + 1)}\right\}$;
  $|f_1(x)| = |f_1(x) - f_1(x_0) + f_1(x_0)| \leq 1 + |f_1(x_0)|$
  $\to |f_1 \cdot f_2(x) - f_1 \cdot f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

iii) <u>Stetigkeit von Polynomen</u>: $\forall p \in \mathbb{R}[T]: p$ ist stetig

- Bew.: $\delta = \varepsilon \to p(x) = x$ stetig $\wedge$ $p(x) = c$ stetig $\overset{\text{ii)}}{\to} p(x) \in \mathbb{R}[x]$ stetig

iv) <u>Stetigkeit unter Verknüpfung</u>: $\forall f: D_1 \to D_2\, \forall g: D_2 \to \mathbb{R}: g, f$ stetig bei $x_0 \to g \circ f$ stetig

- Bew.: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \mu > 0 \overset{\exists \delta}{|} \forall x \in D_1: |x - x_0| < \delta \overset{\text{St.}f}{\to} |f(x) - f(x_0)| < \mu \overset{\text{St.}g}{\to} |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

v) <u>Stetigkeit von Quotienten</u>: $\forall f \in \mathcal{F}(D)\, \forall g \in \mathcal{F}^{\times}(D): f, g$ stetig $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig

- Bew.: $\delta = g(x_0) \cdot \varepsilon \cdot \min\{|g(x)| \mid x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}\right| \leq \frac{\delta}{g(x_0) g(x)} < \varepsilon$
  $\overset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig

VI) Stetigkeit durch Fallunterscheidung : $\forall f \in \mathcal{F}(D)\ \forall a,b,c \in D: f := \begin{cases} f_1(x) & x \in [a,b) \\ f_2(x) & x \in [b,c] \end{cases}$

stetig $\Leftrightarrow f_1, f_2$ stetig $\wedge f_1(b) = f_2(b)$

· Bew.: Stetigkeit in b: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

VII) Stetigkeit über offenen Mengen: $\forall f \in \mathcal{F}(D): f$ stetig $\Leftrightarrow (\forall U \subseteq \mathbb{R}: U$ offen $\rightarrow f^{-1}(U)$ offen$)$

· Bew.: "$\Rightarrow$": $f(V_x :=$ Umgebung von $x) \subseteq U \Leftrightarrow f^{-1}(U) \supseteq V_x \supseteq O_x :=$ bel. offene Menge mit gg.

Eigenschaften; $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} O_x$

"$\Leftarrow$": U offene Umgebung von $f(x) \rightarrow \exists U_\varepsilon(f(x)) : U_\varepsilon(f(x)) \cap \mathbb{R} \subseteq U \wedge$

$\forall U_\delta(x) : U_\delta(x) \cap D \subseteq f^{-1}(U)$; $N := f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \rightarrow N$ offen &

Umgebung von $x \rightarrow \exists \delta : U_\delta(x) \cap P \subseteq N \Rightarrow (\forall x \in U_\delta(x) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x)))$

VIII) Komplexwertige Funktionen

· Def: $\mathcal{F}_\mathbb{C}(D) := \{f \mid f: D \rightarrow \mathbb{C}\}$

· Def: $f \in \mathcal{F}_\mathbb{C}(D)$ beschränkt $\Leftrightarrow x \in D \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$ beschränkt ist

VII. Der Zwischenwertsatz

· Beh.: $\forall f \in \mathcal{F}_{\text{stetig}}(I): \forall a,b \in I\ \forall c \in \mathbb{R}: f(a) \leq c \leq f(b)\ \exists x \in [a,b]: f(x) = c$

· Bew.: $\sup(X := \{x \in [a;b] \mid f(x) \leq c\}) = x_0$; $f(x_0) < c \rightarrow \exists \varepsilon, \exists x \mid f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) < c \rightarrow$ $f(x_0)<$

$\rightarrow$ ↯ sup; $f(x_0) > c \rightarrow \exists x\ \exists \varepsilon: f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) > c$ ↯ $f(x) \in X$ $f(x_0)>$

VIII. Satz über die Umkehrabbildung

· Beh.: $\forall f \in \mathcal{F}(I) \in C^1 : f$ str. mon. $\wedge I$ Intervall: $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist Intervall $\wedge \exists f^{-1}$ $\in \mathcal{F}_I(f(I)): f^{-1} \in C^1 \wedge f^{-1}$ str. mon. $\wedge (I = [a,b] \rightarrow f(I) = [f(a), f(b)])$

· Bew.: f bij.; Mon.: $((x_1 < x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) < f(x_2))) \rightarrow ((f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow (y_1 < y_2))$;

$f(I)$ Intervall: $c := \inf(f(I))$, $d := \sup(f(I))$, $\exists x_-, x_+ \in f(I) : c \leq f(x_-) < y < f(x_+) \leq d$

$\overset{ZWS}{\rightarrow} \forall y \in (c,d) \in f(I)$; f^{-1} stetig: $y_0 < d \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) < b \rightarrow \exists x_+ \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

$\forall y \in f(I): y_0 \leq y < y_+ \rightarrow f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_+) = x_+ < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

genauso x_-; $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \rightarrow f^{-1}(y_0 - \varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$

IX. Wurzeln natürlicher Zahlen

· Beh.: $\forall k,m \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}: x := \sqrt[m]{k} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

· Bew.: $\sqrt[m]{k} = \frac{p}{q}$ gekürzt $\rightarrow k = \frac{p^m}{q^m} \rightarrow q = 1 \rightarrow \sqrt[m]{k} = p$; $x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Q}$ wegen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

X. Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

i) **Beschränktheit**: $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \forall f: [a,b] \to \mathbb{C} \in C^1 : \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$

- Bew.: $X := \{ t \in [a,b] \mid f|_{[a,t)} \text{ beschränkt} \}$; $\forall x \in (t_0 := \max\{a, s_0 := \sup(X) - \delta\}, t_1 := \min\{b, s_0 + \delta\})$:
  $|f(x)| \leq |f(x) - f(s_0)| + |f(s_0)| < 1 + f(s_0)$; $|f|_{[a,t_1]}(x)| \leq \max\{1 + f(s_0), M_0 := \forall x \in [a,t]\ M_0 \geq |f(x)|, f(t_1)\} \to t_1 \in X \leq s_0 \to t_1 = b \to f$ beschränkt

ii) **Annahme des Maximums / Minimums**: $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1 : \exists x_{max}, x_{min} \in [a,b]\ \forall x \in [a,b]$:
$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

- Bew.: $F : [a,b] \to (0,\infty) : x \mapsto \frac{1}{S - f(x)}$; $S := \sup(\{ f(x) \mid x \in [a,b] \})$; Widerspr. bew.:
  $\forall x\ S > f(x) \overset{\text{VI. v)}}{\to} F$ stetig $\overset{\text{i)}}{\wedge}$ beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : M \geq \frac{1}{S - f(x)} \to f(x) < S - \frac{1}{M}$
  $\to$ ↯ Sup

iii) **Gleichmäßige Stetigkeit**

- Def.: f gl. st. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \in \mathbb{R}\ \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

iv) **Satz von Heine**: $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1$: f ist gleichmäßig stetig

- Bew.: $X := \{ t \in [a,b] \mid \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [a,t] : |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \}$;
  St. bei $\sup(X) = s_0$: δ_1; $t_0 = \max\{a; s_0 - \frac{1}{2}\delta_1\}$; $t_1 = \min\{b; s_0 + \frac{1}{2}\delta_1\}$;
  $\delta = \min\{\delta_0; \frac{1}{2}\delta_1\}$; zeige: $\forall x_1, x_2 \in [a,t] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
  $\to t_1 = s_0 \Leftrightarrow t_1 = b$

v) **Lipschitz-Stetigkeit**

- Def.: f lip. st. $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot L \quad (L \geq 0, \text{konst})$

Kapitel 4 – Das Riemann-Integral

I. Zerlegungen von $[a,b]$

· Def.: $\mathfrak{Z}$ ist Zerlegung $\leftrightarrow \mathfrak{Z} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \leftrightarrow P(\mathfrak{Z}) = \{\{a\}, (x_0,x_1), \{x_1\}, (x_1,x_2), \{x_2\}, \dots, (x_{n-1}, x_n), \{b\}\}$

II. Treppenfunktionen (TF)

· Def.: f ist TF $\leftrightarrow \exists \mathfrak{Z}\ \forall k \in \{1,\dots,n\}\ \exists c_k \in \mathbb{R}: \forall x \in (x_{k-1}, x_k): f(x) = c_k$

· Def.: (x_{k-1}, x_k) **Konstanzintervall** $\leftrightarrow \forall x \in (x_{k-1}, x_k): f(x) = c_k$

· Def.: $\mathfrak{Z}'$ feiner als $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \forall x_k \in \mathfrak{Z}: x_k \in \mathfrak{Z}'$

· Def.: $\mathfrak{Z}$ ist gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}'' \leftrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \cup \mathfrak{Z}''}$

· Def.: $I(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \Delta x_k$

i) Unabhängigkeit von Zerlegung in Konstanzintervalle: $\forall f \in TF\ \forall \mathfrak{Z} \in ZK$ (Zerl. in Konstanzintervalle): $I(f,\mathfrak{Z})$ unabhängig von $f(x_k) \wedge \mathfrak{Z}$.

· Bew.: $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \cup \{x_i\} \to I(f,\mathfrak{Z}) = I(f,\mathfrak{Z}')\ [c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c_k \cdot (x_k - x_i) + c_k (x_i - x_{k-1})]$
Induktion für mehrere Veränderungen / $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}' \to \mathfrak{Z}''$ mit $\mathfrak{Z}'$ gem. Verf. von $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}''$.
Unabh. von $f(x_k)$: $I(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) = I(f',\mathfrak{Z})$ für $f(x) = c_k = f'(x)\ [\forall x \in (x_{k-1}, x_k)]$

· Def. (Integral einer TF): $\int_a^b f(x)\,dx = I(f,\mathfrak{Z})$

ii) Linearität des Integrals von TF: $TF := \{f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f$ ist Treppenfunktion$\}$ ist UV von $\mathcal{F}([a,b])$. $\int: TF([a,b]) \to \mathbb{R}$ ist linear.

· Bew.: $\mathfrak{Z} :=$ gem. Verf. $\mathfrak{Z}_f, \mathfrak{Z}_g$; $f(x) + g(x) = c_k + d_k\ [\forall x \in (x_{k-1}, x_k)]$; $s \cdot f(x) = s \cdot c_k$;
$\int_a^b g + f\,dx = \sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k)\,\Delta x_k = \int_a^b g\,dx + \int_a^b f\,dx$; $\int_a^b sf\,dx = s \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = s \cdot \int_a^b f\,d$

iii) Monotonie des Integrals von TF: $\forall f,g \in \mathcal{F}([a,b]): f \leq g: \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

· Bew.: $\mathfrak{Z} :=$ gem. Verfeinerung $\mathfrak{Z}_f \wedge \mathfrak{Z}_g$: $c_k \leq d_k \to \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_k \,\Delta x_k \to I(f,\mathfrak{Z}) \leq I(g,$

III. Das Riemann-Integral

· Def. (Untersumme): $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]): \mathcal{U}(f) := \{\int_a^b u\,dx \mid u \in TF([a,b]) \wedge u \leq f\}$

· Def. (Obersumme): $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]): \mathcal{O}(f) := \{\int_a^b o\,dx \mid o \in TF([a,b]) \wedge o \geq f\}$

· Def. (Riemann-Integrierbarkeit): $\underline{I}(f) := \sup \mathcal{U}(f)$; $\overline{I}(f) := \inf \mathcal{O}(f)$;
f R-integrierbar $\leftrightarrow \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f\,dx = I(f)$;
$R([a,b]) = \{f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f$ ist R-integrierbar$\}$

i) Charakterisierung des Riemann-Integrals

· Beh.: f R-int. $\Leftrightarrow \exists!\, I \in \mathbb{R} : \int_a^b u\,dx \leq I \leq \int_a^b o\,dx \quad [\forall u,o \in TF([a,b]) : u \leq f \leq o] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists u,o \in TF([a,b]) : u \leq f \leq o : \int_a^b (o-u)\,dx < \varepsilon$

· Bew.: i) $\to$ iii) : Ang. $\neg$ iii): $\exists \varepsilon > 0\, \forall u,o \in TF([a,b]) : u \leq f \leq o : \int_a^b (o-u)\,dx \geq \varepsilon \to \sup(U) < \inf(O)$ $\to \lightning$ i)

iii) $\to$ ii) : $\left(o \geq u \wedge \forall \varepsilon > 0 : \int_a^b o - \int_a^b u < \varepsilon\right) \to \inf(O) - \sup(U) = 0 \to$

$\forall u,o \in TF([a,b]) : u \leq f \leq o\ \exists!\, I = \inf(O) = \sup(U) \in \mathbb{R} : \int_a^b u\,dx \leq I \leq \int_a^b o\,dx$

ii) $\to$ i) : Ang. f nicht R-int.: $\underline{I}(f) \leq I_{1,2} \leq \overline{I}(f)\ [I_1 \neq I_2]$

ii) Wohldefiniertheit : $t \in TF([a,b])$ ist R-intb. $\wedge \int_a^b t\,dx = I(t,\mathfrak{Z})$

· Bew.: $\int t \in U(t) \wedge \int t \in O(t) \to \sup(U) = \int t = \inf(O) = I(t,\mathfrak{Z})$ mit $\mathfrak{Z} \in ZK$

iii) Linearität : $R([a,b])$ ist UVR von $F([a,b]) \wedge \int : R([a,b]) \to \mathbb{R}$ ist linear

· Bew.: · $s\int_a^b f\,dx = \int_a^b sf\,dx$: II.ii) $s \cdot U(f) \subseteq U(sf) \wedge s \cdot O(f) \subseteq O(sf)$

Kap. 2 IX ii) : $s\underline{I}(f) = s \cdot \sup(U(f)) = \sup(s\,U(f)) \leq \sup(U(sf)) = \underline{I}\,sf \leq \overline{I}\,sf \leq$

$\leq \inf(s\,O(f)) \overset{s.}{=} \inf(O(f)) = s\,\overline{I}(f)$; f R-intb. $\to \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \to \underline{I}(sf) = \overline{I}(sf)$

[für $s < 0$: Umkehrung der Ungleichheitszeichen]

· $\int_a^b (f_1 + f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx + \int_a^b f_2\,dx$: II.ii): $U(f_1) + U(f_2) \subseteq U(f_1 + f_2)$ [ebenso für O]

Kap. 2 IX. iii): $\sup(U(f_1) + U(f_2)) = \sup(U(f_1)) + \sup(U(f_2)) = \underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2)$ [ebenso für O]

$\sup(U(f_1) + U(f_2)) \leq \sup(U(f_1 + f_2)) = \underline{I}(f_1 + f_2) \leq \overline{I}(f_1 + f_2) = \inf(O(f_1 + f_2)) \leq \inf(O(f_1) + O(f_2))$

$\xrightarrow{f_1, f_2 \in R([a,b])} \underline{I}(f_1 + f_2) = \overline{I}(f_1 + f_2) = I(f_1 + f_2) \to (f_1 + f_2)$ ist R-intb.

iv) Monotonie

· Def.: $f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$; $f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$; $|f|(x) := \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|$

· Beh.: $\forall f_1, f_2 \in R([a,b])$: a) $f_1 \geq 0 \to \int_a^b f_1(x)\,dx \geq 0$

b) $f_1 \leq f_2 \to \int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$

c) $|f_1| \in R([a,b]) \wedge \left|\int_a^b f_1(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_1(x)|\,dx$

· Bew.: a) $f_1 \geq 0 \to u = 0 \in TF : u \leq f_1 \to 0 = \int_a^b u\,dx \leq \sup(U(f_1)) = \underline{I}(f_1) = \int_a^b f_1(x)\,dx$

b) $0 \leq f_2 - f_1 \overset{a)}{\to} \int_a^b f_2 - f_1\,dx \geq 0 \to \int_a^b f_2\,dx \geq \int_a^b f_1\,dx$

c) $u^+ := \max\{0, u\}$; $o^+ := \max\{0, o\}$; $u^+ \leq f^+ \leq o^+ \wedge o^+ - u^+ \leq o - u$

$\overset{b)}{\to} \int_a^b o^+ - u^+\,dx \leq \int_a^b o - u\,dx < \varepsilon \to f^+ \in R([a,b]) \to |f| = 2f^+ - f \in R([a,b])$

$(f \leq |f| \wedge -f \leq |f|) \to \int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^b -f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \to \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

v) <u>Teilintervalle</u>: $f \in R([a,c]) \leftrightarrow f_1, f_2 \in R([a,b]): f|_{[a,b]} = f_1 \wedge f|_{[b,c]} = f_2$

· Bew.: $\int_a^b f_1\, dx = I(f_1, Z_1) \wedge \int_a^b f_2\, dx = I(f_2, Z_2) \rightarrow \int_a^b f\, dx = I(f, Z = Z_1 \cup Z_2)$

· Def.: $\int_a^a f\, dx = 0$, $\int_b^a f\, dx = -\int_a^b f\, dx$

· <u>Stetigkeit des partikulären Integrals</u>: $\forall f \in R([a,b]): x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\, dt \in C^1([a,b])$

· Bew.: $o \in O(f)$; $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$ $\rightarrow |\int_a^x f - \int_a^{x_0} f| = |\int_{x_0}^x f| \leq |o = c \cdot (x_0 - x)| < \varepsilon$
Konst. auf (x, x_0)

IV. Anwendungen des Riemann-Integrals

· Def. (additive Intervallfunktion): $\forall I: (\alpha, \beta) \in [a,b]^2 \mapsto I(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ ist additive IF

$\leftrightarrow$ i) $\forall \alpha \in [a,b]: I(\alpha, \alpha) = 0$

ii) $\forall \alpha, \beta \in [a,b]: I(\beta, \alpha) = -I(\alpha, \beta)$

iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [a,b]: I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) = I(\alpha, \gamma)$

i) <u>Charakterisierung einer additiven IF</u>: $\forall f \in R([a,b])\ \forall I \in IF([a,b]): [\forall \alpha < \beta \in [a,b]: (\beta - \alpha) \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \leq I(\alpha, \beta) \leq (\beta - \alpha) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)] \rightarrow I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

· Bew.: $\underline{I} \leq I(\alpha, \beta) \leq \overline{I} \xrightarrow[\underline{I} = \overline{I}]{f \in R([a,b])} I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f$

ii) <u>Interpretationen des Integrals</u>

· Flächeninhalt des Gebiets $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ unter graph ($f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

· physikalischer Gebrauch: Gesamtmasse ($\int_a^b \rho(x)$), Gesamtmoment ($\int_a^b \rho(x)\, g \cdot x\, dx$), Schwerpunkt ($\frac{1}{m} \int_a^b \rho(x)\, x\, dx$), geleistete Arbeit ($\int_a^b f$ mit f = Energieverbrauch)

V. Integrierbarkeit monotoner Funktionen

i) <u>Satz</u>: $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]): f$ ist monoton $\rightarrow f \in R([a,b])$

· Bew.: $\exists \sup(U(f)), \inf(O(f))$ wegen $f_1: x \mapsto f(a) \in U(f) \wedge f_2: x \mapsto f(b) \in O(f)$ [oBdA f. steigend]

Ang. $\sup(U(f)) \neq \inf(O(f))$. $\sup(U(f)) \neq f \vee \inf(O(f)) \neq f$

$\xrightarrow{oBdA} Z_v' = Z_v \sqcup \{x\}$ $x \in [a,b] \rightarrow \lightning \sup$

· Def.: $f \in \mathcal{F}([a,b])$ stückweise monoton $\leftrightarrow \exists Z \in ZK: f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ monoton $(\forall x_i \in Z)$

ii) <u>Riemann-Integrierbarkeit stückweise monotoner Funktionen</u>: $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]): f$ stkweise mon. $\rightarrow f \in R([a,b])$

· Bew.: i) + Additivität des Integrals

VI. Integration von Polynomen

1) Riemann-Integrierbarkeit von Polynomen: $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]) : f$ ist Polynomfunktion :

$f \in R([a,b]) \wedge \int_a^b x^d\,dx = \frac{1}{d+1}(b^{d+1} - a^{d+1})$.

· Bew.: f stkw. mon. $\xrightarrow{K3\,\mathrm{VI}\,1x)} f \in R([a,b])$; $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}b\right)^d \cdot \frac{b}{n} \le \int_0^b x^d\,dx \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^d \cdot \frac{b}{n}$

$\sum_{k=1}^n k^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + c_d n^d + \dots + c_1 n + c_0 \le \frac{n^{d+1}}{d+1} + \underbrace{(|c_d| + \dots + |c_0|)}_{c_+} n^d$; $\sum_{k=1}^{n-1} k^d = \sum_{k=1}^{n} k^d - n^d =$

$= \frac{n^{d+1}}{d+1} + (c_d - 1)n^d + c_{d-1}n^{d-1} + \dots + c_1 n + c_0 \ge \frac{n^{d+1}}{d+1} - \underbrace{(|c_d - 1| + |c_{d-1}| + \dots + |c_0|)}_{c_-} n^d$

$\rightarrow \frac{b^{d+1}}{d+1} - \frac{c_- b^{d+1}}{n} \le \int_0^b x^d\,dx \le \frac{b^{d+1}}{d+1} + \frac{c_+ b^{d+1}}{n} \xrightarrow[\text{Prinz.}]{\text{Arch.}} \int_0^b x^d\,dx = \frac{b^{d+1}}{d+1}$

Analog für $\int_a^0$. $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a = \frac{b^{d+1} - a^{d+1}}{d+1}$

VII. Integrierbarkeit stetiger Funktionen

1) Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen

· Beh.: $\forall f \in C^0([a,b]) : f \in R([a,b])$

· Bew.: Komp & stetig $\rightarrow$ gl. st.; $u(x) := \begin{cases} m_k := \min f([x_{k-1}, x_k]) & k \in \{1,\dots,n\} \\ m_n & x = b \end{cases}$

$Z : \max\{x_k - x_{k-1}\} < \delta$ $\quad o(x) := \begin{cases} M_k := \max f([x_{k-1}, x_k]) & k \in \{1,\dots,n\} \\ M_n & x = b \end{cases}$

$\rightarrow \int_a^b o - u\,dx = \int_a^b \varepsilon \cdot (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{konst.}} \rightarrow f \in R([a,b])$

ii) Sandwich-Kriterium mit stetigen Funktionen: $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]) : f \in R([a,b]) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists f_-, f_+ \in C^0([a,b]) : f_- \le f \le f_+ \wedge \int_a^b (f_+ - f_-)\,dx < \varepsilon$

· Bew.: „$\leftarrow$": $f_-, f_+ \in C^0([a,b]) \rightarrow f_-, f_+ \in R([a,b]) \rightarrow \exists o, u : \int_a^b o - f_+\,dx < \varepsilon \wedge$

$\int_a^b f_- - u\,dx < \varepsilon \rightarrow ((o \ge f_+ \ge f \ge f_- \ge u) \rightarrow \int_a^b o - u\,dx \le 3\varepsilon) \rightarrow f \in R([a,b])$

„$\rightarrow$": $o_+ := \begin{cases} M := \max([a,b]) + (c_k - M) \cdot \frac{x - x_{k-1}}{\delta} & x \in [x_{k-1}, x_{k-1} + \delta) \\ c_k & x \in [x_{k-1} + \delta, x_k - \delta) \\ M + (c_k - M)\frac{x_k - x}{\delta} & x \in [x_k - \delta, x_k) \\ M & x = b \end{cases}$ $\delta := \frac{1}{2}\min\{|x_k - x_{k-1}| : k \in \{1,\dots,n\}\}$

$\int_a^b o_+ - o\,dx \le \sum_{k=0}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} o_+ - o\,dx \le (M - m)\,\delta n$. $\delta < \frac{\varepsilon}{2(M-m)n} \rightarrow \int_a^b o_+ - o\,dx < \varepsilon$

u_- analog; $u_- \le u \le f \le o \le o_+ \rightarrow \int \underbrace{o_+}_{= f_+} - \underbrace{u_-}_{= f_-}\,dx < 3\varepsilon$

VIII. Mehrdimensionale Integrale

- Def. (Treppenfunktion): $(t : [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] \to \mathbb{R}) \in \mathcal{TF} \Leftrightarrow \exists \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_d :$
  $\forall i_1, \ldots, i_d : t((x_{i_1 - 1}, x_{i_1}) \times \ldots \times (x_{i_d - 1}, x_{i_d})) = c_k$ (konst.)

d-te Koordinate

- Def. (Integral einer TF): $\int\limits_Q t \, d\mathrm{vol} = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_d} c_{i_1, \ldots, i_d} (\overset{1}{x}_{i_1} - \overset{1}{x}_{i_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (\overset{d}{x}_{i_d} - \overset{d}{x}_{i_d - 1})$

i) <u>Satz von Fubini</u>: $f(x,y)$ stetig $\to \int\limits_Q f \, d\mathrm{vol} = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y) \, dy \right) dx = \int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y) \, dx \right) dy$

ii) <u>Polarkoordinaten</u>: $\int\limits_{B_R(0)} f(x,y) \, d\mathrm{vol} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \, r \, d\varphi \, dr$

iii) Kugelkoordinaten: $\int\limits_{B_R(0)} f(x,y,z) \, d\mathrm{vol} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta) \, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$

Kapitel 5 – Metrische Räume, Folgen und Stetigkeit

I. Normierte Vektorräume

· Def. (Normen): $\|\cdot\| : v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ ist Norm $\Leftrightarrow$ V ist VR $\wedge$

i) Definitheit: $\forall v \in V: \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) Homogenität: $\forall v \in V \, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

iii) Dreiecksungleichung: $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

· Def.: $(V, \|\cdot\|)$ ist normierter Vektorraum $\Leftrightarrow$ V ist VR $\wedge$ $\|\cdot\|$ ist Norm auf V

· Def.: $\pi_j : v = (v_1, \dots, v_d)^t \in \mathbb{C}^d \mapsto v_j \in \mathbb{C}$ ist die Projektion auf die j-te Komponente

i) Maximums-/Unendlichkeitsnorm: $\|v\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |\pi_j(v)|$

ii) Einsnorm: $\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |\pi_j(v)|$

iii) Euklidische Norm: $\|v\|_2 = \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\pi_k(v)|^2}$

· Euklidisches Inneres Produkt ($\equiv$ Skalarprodukt): $\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \overline{w_j}$ für $v, w \in \mathbb{C}^d$

a) Sesquilinearität: $\forall v, v', w, w' \in V \, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$: $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle$

$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle v, w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, w_2 \rangle$

b) Symmetrie: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

c) Definitheit: $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$; $\langle v, v \rangle \geq 0$

· Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

· Bew.: $\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$; $\|v - \alpha w\|^2 = \langle v, v \rangle - \overline{\alpha} \langle v, w \rangle - \alpha \overline{\langle v, w \rangle} + |\alpha|^2 \|w\|^2 =$

$$= \|v\|^2 - 2 \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \geq 0$$

$\rightarrow \|v\|^2 \|w\|^2 \geq |\langle v, w \rangle|^2 \rightarrow \|v\| \cdot \|w\| \geq |\langle v, w \rangle|$

· Euklidische Norm ist Norm auf $\mathbb{C}$: Δ-Ugl.: $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2$

$= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \overset{C.-S.}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$

iv) Der Raum der stetigen Funktionen

· Def.: $C([a,b]) :=$ VR der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

· Unendlichdimensionalität von $C([a,b])$: $\dim(C([a,b])) = \infty$

· Bew.: Ang. $\dim(C([a,b])) < \infty$. Konstruiere f, sodass es von jeder Funktion der Basis einen Teilabschnitt enthält, der in keiner anderen vorkommt. Da die Funktionen der Basis linear unabhängig sind folgt, dass f ebenso Basisfunktion sein muss.

· **Supremumsnorm**: $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ für $f \in C([a,b])$

· **1-Norm**: $\forall f \in C([a,b]): \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$

II. Metrische Räume

· Def.: (X,d) ist metrischer Raum $\Leftrightarrow$ X ist Menge $\wedge$ $d: X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:

i) Definitheit: $\forall x_{1,2} \in X: d(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ii) Symmetrie: $\forall x,y \in X: d(x,y) = d(y,x)$

iii) Dreiecksungleichung: $\forall x,y,z \in X: d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

i) **Induzierte Metrik** (von Norm): $\|\cdot\|$ Norm auf $V :=$ VR über $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $d_{\|\cdot\|}(v_1,v_2) := \|v_1 - v_2\|$ ist Metrik auf V

· Bew.: Definitheit, Δ-Ungl. unmittelbar aus $\|\cdot\|$; Symmetrie über Homogenität von $\|\cdot\|$:
$d_{\|\cdot\|}(v_1,v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|-1\,(v_2 - v_1)\| = |-1|\cdot\|v_2 - v_1\| = d_{\|\cdot\|}(v_2,v_1)$

ii) Diverse Beispiele:

· Diskrete Metrik: $d_{\text{diskret}}(x_1,x_2) := \begin{cases} 1 & | \; x_1 \neq x_2 \\ 0 & | \; x_1 = x_2 \end{cases}$

· Manhattenmetrik $(X = \mathbb{R}^2)$:
$d_{NY}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

· Französische Eisenbahn-Metrik $(X = \mathbb{C})$: $d_{SNCF}(z_1,z_2) := \begin{cases} |z_1 - z_2| & | \; z_1, z_2 \text{ lin. abh. über } \mathbb{R} \\ |z_1| + |z_2| & | \; z_1, z_2 \text{ lin. unabh. über } \mathbb{R} \end{cases}$

iii) Umgekehrte Dreiecksungleichung: $|d(x_1,y) - d(x_2,y)| \leq d(x_1,x_2)$

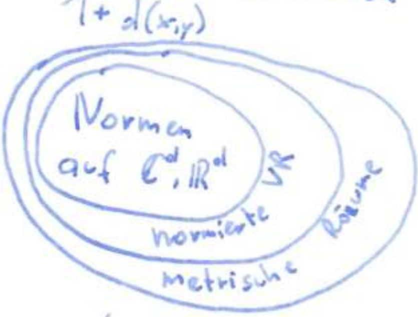
· Bew.: • OBdA: $d(x_2,y) \geq d(x_1,y)$: $d(x_2,y) \overset{\Delta\text{-U.}}{\leq} d(x_2,x_1) + d(x_1,y) \rightarrow |d(x_2,y) - d(x_1,y)| \leq d(x_2,x_1)$

iv) Deformation der Metrik

a) $d_{\frac{1}{2}}(x,y) := \sqrt{d(x,y)}$ ist Metrik

b) $\tilde{d}(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ ist Metrik

v) Überblick



· Def.: $Y \subseteq X \rightarrow (Y, d|_{Y\times Y})$ Teilraum mit induzierter Metrik $d|_{Y\times Y}$

VI) Offene Bälle

· Def.: $\forall (X,d) \forall r>0 \forall x_0 \in X: B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$

· Def.: $O \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x_0 \in O \exists r>0: B_r(x_0) \subseteq O$

· Schnitt offener Bälle: $\forall (X,d) \forall x_1, x_2 \in X \forall r_1, r_2 > 0: B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$ ist offen

· Bew.: $\emptyset$ ist offen; $r_0 = \min\{r_1 - d(x_0,x_1), r_2 - d(x_0,x_2)\} \rightarrow B_{r_0}(x_0) \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$

III. Folgen und Konvergenz

· Def.: a ist Folge $\Leftrightarrow a: \mathbb{N} \rightarrow X$; $a(n) = a_n :=$ n-tes Folgenglied; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_n := a: \mathbb{N} \rightarrow X$

· Def.: a schließlich konstant $\Leftrightarrow \exists N \forall n,m \geq N: a_n = a_m$; a konst. $\Leftrightarrow \forall n,m: a_n = a_m$

· Def.: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ / $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = F_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ sind VR der reell-/komplexwertigen Folgen mit Verknüpfungen:

a) $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$

b) $\alpha \cdot (a_n)_n = (\alpha \cdot a_n)_n$

· Def. (Konvergenz): $\forall (X,d) \forall (a_n)_n: (a_n)_n$ konvergiert gegen $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: d(a_n, x_0) < \varepsilon$,

$x_0 :=$ Grenzwert der Folge $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$(a_n)_n$ divergent $\Leftrightarrow \nexists x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: d(a_n, x_0) < \varepsilon$

· Bemerkung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, A) = 0$

I) Eindeutigkeit des Grenzwerts: $(a_n)_n$ konvergent $\Leftrightarrow \exists! A \in X: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

· Bew.: Ang. $A_1 \neq A_2: A_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \wedge A_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; wähle $\varepsilon < \frac{d(A_1, A_2)}{2} \rightarrow \forall n \geq \max\{N_1,$

$d(a_n, A_1) < \varepsilon \wedge d(a_n, A_2) < \varepsilon \quad d(a_n, A_1) + d(a_n, A_2) < 2\varepsilon < d(A_1, A_2)$ ↯ Δ-Ungl.

· Def. (Umgebung): $\forall (X,d)$: $U \subseteq X$ ist Umgebung von $x_0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$

II) Alternative Formulierung: Konvergenz: $(a_n)_n$ konvergent gegen x_0 $\Leftrightarrow \forall U: U$ ist Umgebung von x_0:

$\tilde{\forall} :=$ fast alle $:=$ alle, bis auf endlich viele $a_i \in (a_n)_n \in U$

III) Indexverschiebung: $(a_n)_n$ konvergent $\Leftrightarrow (a_{n+l})_n$ konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+l}$

· Bew.: $N' = N - l$

· Def.: $(a_n)_n \in (V, \|\cdot\|) =$ normierter VR beschränkt $\Leftrightarrow \exists M > 0: \|a_{i\in\mathbb{N}}\| \leq M$

IV) Beschränktheit: Jede konvergente Folge in einem normierten VR ist beschränkt.

· Bew.: $(a_n)_n$ konv. $\rightarrow \exists N > 0: d(a_n, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A) < 1 \rightarrow (a_n)_n \leq \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$

V) Beispiele konvergenter Folgen

· (Schließlich) konstante Folge $(a_n)_n: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \quad (\forall n \geq N: a_n = c)$

· $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)_n = 0$ (Archimedisches Prinzip)

· $(a_n)_n = (-1)^n$ ist divergent

VI) Reelle Grenzwerte: $\forall (a_n)_n \in \mathbb{C} : \underset{\forall n \in \mathbb{N}}{a_n} \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\forall n}{\in} \mathbb{R}$

· Bew.: Ang. $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Wähle $\varepsilon < \mathrm{Im}(A) \rightarrow \forall |A - a_n| > \varepsilon \rightarrow \lightning$

VII) Additivität und Multiplikativität des Grenzwertes

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

· Bew.: $N = \max\{N_a, N_b\} : \forall n \geq N: a_n \in (A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2}) \wedge b_n \in (B - \frac{\varepsilon}{2}, B + \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow (a_n + b_n) \in (A+B-\varepsilon, A+B+\varepsilon)$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

· Bew.: $\varepsilon < 1 \rightarrow \varepsilon^2 < \varepsilon$; $N := \max\{N_a, N_b\}$; $\forall n \geq N: a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \wedge b_n \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon) \rightarrow$

$\rightarrow \mathrm{sgn}(A) = \mathrm{sgn}(B)$ [OBdA +]: $AB - (A+B)\cdot\varepsilon + \varepsilon^2 \leq a_n b_n \leq AB + (A+B)\varepsilon + \varepsilon^2$ [ε beliebig]

$\mathrm{sgn}(A) \neq \mathrm{sgn}(B)$ [OBdA $-;+$]: $AB + (A-B)\varepsilon - \varepsilon^2 \leq a_n b_n \leq AB + (B-A)\varepsilon + \varepsilon^2$ [ε bel.]

c) $\forall a_n \neq 0: \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 : \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$

· Bew.: $\delta = \min\left\{\frac{|A|}{2}, \frac{\varepsilon |A|^2}{2}\right\}$; $|a_n| = |a_n - A + A| > |A| - |a_n - A| > |A| - |\frac{A}{2}| = |\frac{A}{2}|$;

$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A}{a_n A} - \frac{a_n}{a_n A}\right| < \frac{|A - a_n|}{\frac{|A|^2}{2}} < \frac{\varepsilon |A|^2/2}{|A^2|/2} = \varepsilon$

VIII) Geometrische Folge

· Def.: $(b_n)_n := q^n \in \mathbb{R}$

· Konvergenz: a) $q = 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

b) $q > 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

c) $|q| < 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

d) $q = -1 \rightarrow$ div.

e) $q < -1 \rightarrow$ div.

IX) Teilfolgen

· Def.: $(a_{n_k})_k$ Teilfolge von $(a_n)_n \leftrightarrow (a_n)_n$ Folge in $X \wedge (n_k)_k : k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ str. mon. wachsend

· Konvergenz von Teilfolgen: $\forall (a_n)_n \in (X, d): \exists A \in X: \lim_{n\to\infty} a_n = A \rightarrow \exists A' \in X: \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = A' \wedge A' = A$

· Bew.: $\exists N\ \forall n \geq N: d(a_n, A) < \varepsilon \rightarrow d(a_{n_k}, A) < \varepsilon$ für $n_k \geq N$

X) Häufungspunkte einer Folge: A Häufungspunkt (HP) von $(a_n)_n \leftrightarrow$

a) $\exists (a_{n_k})_k : \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \leftrightarrow$

b) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N: d(a_n, A) < \varepsilon$

· Bew.: HP $\rightarrow$ a): Def. $a_n = x : x \in B_{\varepsilon/2^n}(A)$

a) $\rightarrow$ b): $\forall n \geq N: d(a_n, A) < \varepsilon \rightarrow \exists n \geq N: d(a_n, A) < \varepsilon$

b) $\rightarrow$ HP: $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N: d(a_n, A) < \varepsilon \rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n: a_n \in B_\varepsilon(A) \rightarrow B_\varepsilon(A) \cap X \neq \emptyset$

XI) Konvergenz in endlich-dimensionalen VR

· Äquivalente Normen: $\forall d \in \mathbb{N}\ \forall (v_n)_n \in \mathbb{C}^d\ \forall v \in \mathbb{C}$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty \leftrightarrow$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ bzgl. $\|\cdot\|_1 \leftrightarrow$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ bzgl. $\|\cdot\|_2 \leftrightarrow$

d) $\forall 1 \le j \le d\ \lim\limits_{n\to\infty} (\pi_j(v_n)) = \pi_j(v)$

· Bew.: $\|w\|_\infty \le \|w\|_1 \le d \cdot \|w\|_\infty$

$\|w\|_\infty \le \|w\|_2 \le \sqrt{d}\, \|w\|_\infty \quad \left(\|w\|_\infty^2 \le \|w\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} |\pi_j(w)|^2 \le d\, \|w\|_\infty^2 \right)$

a) → b): $\|w\|_1 \le d \cdot \|w\|_\infty < d \cdot \varepsilon$

b) → a): $\|w\|_\infty \le \|w\|_1 < \varepsilon$

a) → c): $\|w\|_2 \le \sqrt{d}\, \|w\|_\infty < \sqrt{d} \cdot \varepsilon$

c) → a): $\|w\|_\infty \le \|w\|_2 < \varepsilon$

a) → d): $|\pi_j(v_n) - \pi_j(v)| = |\pi_j(v_n - v)| \le \|v_n - v\|_\infty < \varepsilon$

d) → a): $N := \max\{N_1, \dots N_d\};\ \forall n \ge N:\ \pi_j(v_n) - \pi_j(v) < \varepsilon \to \sum_{j=1}^{d} \pi_j(v_n - v) \le \sum_{j=1}^{d} \|v_n - v\|_\infty \cdot d < \varepsilon \cdot d$

· Korollar: $(a_n)_n \in \mathbb{C}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}((a_n)_n)$ konv. $\wedge$ $\mathrm{Im}((a_n)_n)$ konv.; Bew: siehe XI) - Äqu. Normen

IV. Stetigkeit

· Def. (ε-δ-stetig): $\forall (X, d_X), (Y, d_Y),\ f: X \to Y$: f bei x_0 ε-δ-stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x \in B_\delta(x_0)$: $f(x) \in B_\varepsilon(x_0)$

· Def. (Folgenstetigkeit: f bei x_0 folgenstetig $\Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in X: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

I) Äquivalenz von ε-δ-Stetigkeit und Folgenstetigkeit: f bei x_0 folgenstetig $\Leftrightarrow$ f bei x_0 ε-δ-stetig

· Bew.: „←": $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \to \forall \delta\ \exists N\ \forall n \ge N: d(x_n, x_0) < \delta \xrightarrow{\varepsilon\text{-}\delta\text{-st.}} d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ $\to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

„→": $\exists \varepsilon\ \forall \delta\ \exists x: x \in B_\delta(x_0) \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$; $\delta = \frac{1}{n}$; $\forall x_n: x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge$

$\exists f(x_n) \notin B_\varepsilon(x_0) \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x_0$.

II) Charakterisierung der Stetigkeit: $\forall X, Y$ metrische Räume $\forall f: X \to Y$:

a) f ist stetig $\Leftrightarrow$

b) $\forall x \in X$: f bei x ε-δ-stetig

c) $\forall x \in X$: f bei x folgenstetig

d) $\forall x \in X\ \forall U \subseteq Y$: U ist Umgebung von $f(x)$: $f^{-1}(U)$ ist Umgebung von x

· Bew.: a) → b) → c) → a): Def.; I)

b) → d): $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x \in B_\delta(x_0): f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \to \exists \delta: B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U)$

d) → b): Wähle $U = B_\varepsilon(f(x_0))$; Per Def. einer Umgebung: $\exists \delta: B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U)$

III) Stärkere Stetigkeitsbegriffe

- Def. (Gleichmäßige Stetigkeit): $\forall (X, d_X), (Y, d_Y),\ f: X \to Y:\ f$ gl. st. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x_0 \forall x: d_X(x_0, x) < \delta \to$
  $\to d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$
- Def. (Lipschitz-stetig): $\exists L \geq 0\ \forall x_1, x_2 \in X: d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2)$
- <u>Lipschitz-St. $\to$ Gl.st. $\to$ St.</u>
- Bew.: L. $\to$ Gl.: $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

  Gl. $\to$ St.: $\delta_{x_0} = \delta_{GL}$

IV) Konstruktion stetiger Funktionen

a) $\forall f: X \to Y, g: Y \to Z: f, g$ stetig $\to g \circ f: X \to Z$ st.

- Bew.: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \overset{FS\, f}{\to} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \overset{FS\, g}{\to} \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$

b) $\forall f: X \to \mathbb{C}^d: f$ st. $\Leftrightarrow \forall j \leq d \in \mathbb{N}: f_j := \pi_j \circ f: X \to \mathbb{C}$ st.

- Bew.: „$\to$": $\pi_j: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ L.-st.: $|\pi_j(v - w)| \leq \|v - w\|_\infty \overset{a)}{\to} \pi_j \circ f$ st.

  „$\leftarrow$": $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_d\} \to |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < d \cdot \varepsilon$

c) $+: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ st.

- Bew.: $|(z + w) - (z_0 + w_0)| \leq |z - z_0| + |w - w_0| \leq 2\|(z, w)^t - (z_0, w_0)^t\| \to$ L.st.

d) $\cdot: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ st.

- Bew.: $|zw - z_0 w_0| \leq |zw - z_0 w| + |z_0 w - z_0 w_0| = |w|\,|z - z_0| + |z_0|\,|w - w_0|$;

  $\delta = \min\{1, \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \frac{1}{\max\{|z_0|, 1 + |w_0|\}}\}$; $|w| \leq |w - w_0| + |w_0| \leq 1 + |w_0|$

  $\to |zw - z_0 w_0| \leq (1 + |w_0|)\,|z - z_0| + |z_0|\,|w - w_0| < \varepsilon$

e) $()^{-1}: z \in \mathbb{C}^* \to z^{-1}$ ist st.

- Bew.: $\delta = \frac{1}{2}\min\{|z_0|, \varepsilon |z_0|^2\}$; $|z| \geq |z_0| - |z - z_0| > \frac{1}{2}|z_0|$;

  $|z^{-1} - z_0^{-1}| = |z z_0|^{-1}\,|z_0 - z| < 2\,|z_0|^{-2}\,\frac{1}{2}\varepsilon\,|z_0|^2 = \varepsilon$

Kapitel 6

I. Allgemeine Sätze über reelle Folgen

1) Grenzwerte und Ungleichungen: $\forall \langle a_n\rangle_n, \langle b_n\rangle_n : \forall n\ a_n, b_n \in \mathbb{R} \wedge a := \lim_{n\to\infty} a_n,\ b := \lim_{n\to\infty} b_n$

a) $\forall n: a_n \le b_n \to a \le b$

b) $a < b \to \exists N \forall n \ge N: a_n < b_n$

· Bew.: a) Ang. $a_n \le b_n \wedge a > b$. $\exists N \forall n \ge N: |a_n - a| < \frac{|b-a|}{2} \wedge |b_n - b| < \frac{|b-a|}{2}$

$\to b_n = b + b_n - b < b + \frac{|b-a|}{2} = a - \frac{|b-a|}{2} < a - a + a_n = a_n \to \lightning$

b) $\exists N_a \forall n \ge N_a: |a_n - a| < \frac{|a-b|}{2}$; $\exists N_b \forall n \ge N_b: |b_n - b| < \frac{|a-b|}{2}$; $N := \max\{N_a, N_b\}$;

$\forall n \ge N: \quad a_n < a + \frac{|a-b|}{2} = b - \frac{|a-b|}{2} < b - b + b_n = b_n$

2) Sandwich-Lemma: $\forall \langle a_n\rangle_n, \langle b_n\rangle_n, \langle c_n\rangle_n \in \mathbb{R}: (\forall n\ a_n \le b_n \le c_n \wedge A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n) \to$

$\to A = \lim_{n\to\infty} b_n$

· Bew.: $\forall \varepsilon \exists N := \max\{N_a, N_c\} \forall n \ge N: \overset{(\lim a_n)}{A - \varepsilon} < b_n < \overset{(\lim c_n)}{A + \varepsilon} \to A = \lim_{n\to\infty} b_n$

· Bsp.: a) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{-1}{n}$: $\forall n\ c_n \le b_n \le a_n \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $a_n = \sqrt[n]{a}$ [$a \in \mathbb{R}$ bel.], $b_n := a_n - 1$, z.z.: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a > 1: a = (b_n + 1)^n \overset{\text{Bern.}}{\ge} 1 + nb_n \ge nb_n \to 0 \le b_n \le \frac{a}{n} \to \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + 1 = 1$

$a \in (0,1): \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}} = 1$

c) z.z.: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$; $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$; $n = (b_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \ge \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$

$\overset{n\ge 2}{\to} 0 \le b_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \underset{\uparrow}{\to} \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

st. $\sqrt{\ }$;
Sandw.-L.; Inklus.

II. Monotone Folgen

1) Konvergenz monotoner Folgen: $\forall \langle a_n\rangle_n \in \mathbb{R}: \langle a_n\rangle_n$ konvergent $\leftrightarrow \langle a_n\rangle_n$ beschränkt.

für $\langle a_n\rangle_n$ mon. w.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

für $\langle a_n\rangle_n$ mon. f.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

· Bew.: $\exists N \forall n \ge N: |a_n - a| < 1 \to \forall n: a_n \le \max\{a_i \mid i \le N \in \mathbb{N}\}$;

$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht-leer & beschr. $\to \exists \sup \overset{\text{mon.}}{\to}$ Konvergenz

2) Entgegengerichtete Folgen: $\forall \langle a_n\rangle_n, \langle b_n\rangle_n \in \mathbb{R}: \forall n\ a_n \le b_n \wedge \langle a_n\rangle_n$ mon. st. $\wedge \langle b_n\rangle$ mon. f.: $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

· Bew.: $\langle b_n\rangle_n$ beschr. durch $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; $\langle a_n\rangle_n$ beschr. durch $\inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

III. Limes superior und Limes inferior

· Def.: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{k\geq n} a_k\right) = \inf\left(\sup\limits_{k\geq n} a_k\right)$

· Def.: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\inf\limits_{k\geq n} a_k\right) = \sup\left(\inf\limits_{k\geq n} a_k\right)$

I) <u>Eigenschaften des Lim sup</u>: $\forall \langle a_n\rangle_n \in \mathbb{R}$, beschr.:

a) $\forall \varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}: \forall n\geq M: a_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon\}| < \infty$

b) $\forall\varepsilon>0: |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon\}| = \infty$

· Bew.: a) Nach Def. von $\overline{\lim}$: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N: a_n \leq \overset{\overline{\lim}\, a_n}{a} + \varepsilon \to |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n > a + \varepsilon\}| < N < \infty$

b) $\forall N$ Endabschnitte ~~$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq 1$~~ $S_N := \sup\limits_{k\geq n} a_k \geq S := \inf\limits_{n\geq 1} S_n \to \exists a_k: a_k > S_N - \varepsilon \geq S - \varepsilon \xrightarrow{\text{bel. } N}$ Aussage

II) <u>Analogien $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$</u>

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, -a_n = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

· Bew.: $\sup(A := \{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}) \geq -a_n \to a_n \geq -1\cdot\sup(A) = \inf(-A) = \inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

b) Analogie I):

· $\forall\varepsilon>0: |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon\}| < \infty$; Bew.: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N: a_n > \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon \to |\{\ldots\}| < N < \infty$

· $\forall\varepsilon>0: |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon\}| = \infty$; Bew.: Ang. $|\{\ldots\}| < \infty \to N > \max\{n \mid a_n \in \{\ldots\}\}$: $\inf\limits_{k\geq N} a_k > \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \to$ ↯ $(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \sup(\inf\limits_{k\geq n} a_k))$

III) <u>Kon: Charakterisierung der Konvergenz</u>: $\forall\langle a_n\rangle_n \in\mathbb{R}$, beschr.: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \Leftrightarrow \langle a_n\rangle_n$ konvergent

· Bew.: „$\Rightarrow$": mit I) und II): $\forall\varepsilon>0\ |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon\}| \neq \infty$ $[A := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

$\wedge\ \exists N: \forall n\geq N \in \{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon\} \to$ Konvergenz

„$\Leftarrow$": Ang. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: $\varepsilon = \dfrac{|\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n|}{2} \to \exists N\ \forall n\geq N: |a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$

$\to |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon\}| = |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon\}| < \infty$ ↯

IV) <u>Konvergente Teilfolgen</u>: $\forall\langle a_{n_k}\rangle_k$ Teilfolge $\langle a_n\rangle_n \in\mathbb{R}$, beschr.: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in [\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n]$

$\wedge\ \exists\langle a_{n_k}\rangle: \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \wedge \exists\langle a_{n_k}\rangle: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$

· Bew.: · Ang. $\underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}}_{= A_k} \notin [\underbrace{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}_{= \underline{A}}, \underbrace{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}_{\overline{A}}]$. $\varepsilon = \dfrac{\min(|A_k - \underline{A}|, |A_k - \overline{A}|)}{2} \to |\{a_n \mid n\in\mathbb{N} \wedge a_n \in (A_k-\varepsilon, A_k+\varepsilon)\}| < \infty \to \varepsilon' \in \min\{a_n \mid a_n \in (A_k-\varepsilon, A_k+\varepsilon)\} \to$ ↯

· $\forall\varepsilon\ \forall N\ \exists a_n: n\geq N: a_n \in (\underline{A}-\varepsilon, \underline{A}+\varepsilon) \to$ Definiere Teilfolge durch: $a_i = a_n: a_n \in (\underline{A}-\varepsilon, \underline{A}+\varepsilon)$

$a_{i+1} = a_{n'}: a_{n'} \in (\underline{A} - \varepsilon' \leq |a_i - \underline{A}|, \underline{A} + \varepsilon')$ induktiv

· analog für $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

v) <u>Häufungspunkte von Folgen und Mengen</u>

a) $\langle a_n\rangle_n : \forall r \in \mathbb{R} : r$ ist HP von $\langle a_n\rangle_n$: z.B.: $\langle a_n\rangle_n$ = Abzählfunktion von $\mathbb{Q}$ (1. Cantor'sches Diagonalargument)

b) a HP von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow a$ HP von $\langle a_n\rangle_n$

· Bew.: $\forall \varepsilon > 0 \exists n : d(a_n, a) < \varepsilon$ wegen $\forall x \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} : \exists n : x = a_n$

c) a HP von $\langle a_n\rangle_n \wedge \langle a_n\rangle_n$ inj. $\rightarrow a$ HP von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

· Bew.: Kollektion $K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Elemente dürfen mehrfach vorkommen) : $|K| = |\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}|$ wegen $a_i \neq a_j$ für $i \neq j \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n : d(a_n, a) < \varepsilon \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} : d(x, a) < \varepsilon$

IV. Uneigentliche Grenzwerte

· Def.: $\langle a_n\rangle_n$ divergiert gegen $\pm\infty \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : a_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ bzw. $a_n \leq -\frac{1}{\varepsilon}$

i) <u>Teilfolgen unbeschränkter Folgen</u>

· Beh.: $\forall \langle a_n\rangle_n \in \mathbb{R}$, unbeschr.: $\exists \langle a_{n_k}\rangle_k : \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty \vee -\infty$

· Bew. (Wid.): $\nexists \langle a_{n_k}\rangle_k \rightarrow \exists \varepsilon \forall N_k \exists k \geq N_k : a_{n_k} < \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{a_{n_k} \text{ bel.}} |\{a_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_n \geq \overline{\inf(\{\varepsilon \mid \exists a_{n_k} < \frac{1}{\varepsilon}\})}\}| < \infty$

$\rightarrow \langle a_n\rangle_n$ oben beschr. $\rightarrow$ ↯ für $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$ analog.

ii) <u>Sandwich-Lemma für uneigentliche Grenzwerte</u> : $\forall \langle a_n\rangle_n, \langle b_n\rangle_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

· Bew.: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : b_n \geq a_n \geq \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow b_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

b) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

· Bew.: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq -\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow a_n \leq -\frac{1}{\varepsilon}$

V. Cauchy-Folgen

· Def.: $\forall (X, d) \forall \langle a_n\rangle_n \in X : \langle a_n\rangle_n$ ist Cauchy $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon$

i) <u>Konvergenz impliziert Cauchy</u> : $\forall (X, d) \forall \langle a_n\rangle_n : \langle a_n\rangle_n$ konvergent $\rightarrow \langle a_n\rangle_n$ Cauchy

· Bew.: $A := \lim_{n\to\infty} a_n$; $\forall \varepsilon \exists N \forall n \geq N : d(a_n, A) < \varepsilon \rightarrow \forall \underset{2\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon'}} \exists N \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) \leq d(a_n, A) + d(a_m, A) < 2\varepsilon = \varepsilon'$

ii) <u>Konvergente Teilfolgen von Cauchy-Folgen</u> : $\forall (X, d) \forall \langle a_n\rangle_n : \langle a_n\rangle_n$ Cauchy : $\langle a_n\rangle_n$ konv. $\Leftrightarrow \exists \langle a_{n_k}\rangle_k$ $\langle a_{n_k}\rangle_k$ konv.

· Bew.: $\langle a_n\rangle_n$ konv. $\rightarrow \exists \langle a_{n_k}\rangle_k$ konv. (Konvergenz einer Teilfolge)

$\langle a_n\rangle_n$ Cauchy $\wedge \exists \langle a_{n_k}\rangle_k$ konv. : $A := \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \xrightarrow{\text{Cauchy}} \forall \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_k \exists N := \max(N_c, N_k) \forall n \geq N$:

$d(A, a_m) \leq d(A, a_n) + d(a_n, a_m) < \varepsilon_k + \varepsilon_c = \varepsilon$

III) <u>Cauchy Kriterium für reelle Folgen</u>: $\forall \langle a_n \rangle_n \in \mathbb{R}: \langle a_n \rangle_n$ konv. $\Leftrightarrow \langle a_n \rangle_n$ Cauchy

· Bew.: „$\Rightarrow$": $A := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\forall \varepsilon \exists N \forall n,m \geq N: d(a_n, a_m) \overset{\Delta\text{-U.}}{\leq} d(a_n, A) + d(a_m, A) < 2\varepsilon$

„$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon \exists N \forall k,m \geq N: d(a_k, a_m) < \varepsilon \rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n < \varepsilon \rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

[Bew.: $a_N - \varepsilon \leq a_n \leq a_N + \varepsilon \rightarrow a_N - \varepsilon \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leq a_N + \varepsilon \rightarrow$ – " –]

IV) <u>Falsches Cauchy-Kriterium</u>: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \langle a_n \rangle_n$ konv.

· Gegenbeispiel: $\langle a_n \rangle_n = 1, 1+\frac{1}{1}, 2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{2}{2}, 3, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{2}{3}, 3+\frac{3}{3}, \ldots$

V) <u>Vollständigkeit der reellen Zahlen</u>: Archimedisches Prinzip $\wedge$ III) $\rightarrow$ Vollständigkeitsaxiom

· Bew.: Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}: \forall x \in X \forall y \in Y: x \leq y$. *) $\langle a_n \rangle_n := a_{2l} \in X, a_{2l+1} \in Y: \forall l: a_{2l} < a_{2(l+1)}$

$\wedge\ a_{2l+1} > a_{2(l+1)+1} \rightarrow \langle a_n \rangle_n$ Cauchy $[\nexists \max(X) \vee \min(Y)] \overset{\text{Voraus.}}{\rightarrow} \langle a_n \rangle_n$ Konvergent

*) $\exists \max(X) \vee \exists \min(Y) \rightarrow \exists c\, (\max(X) \vee \min(Y))$

$\rightarrow \exists c: \forall x \in X: c \geq x \vee \forall y \in Y: y \geq c$

VI) <u>Zusammenfassendes Diagramm</u>

$$
\begin{array}{l}
\text{monoton} \wedge \text{beschränkt} \Rightarrow \text{Konvergent} \overset{\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \text{Cauchy} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\
\quad \text{Existenz sup\textbackslash inf} \overset{\wedge \neq \emptyset}{\Leftarrow} \text{beschränkt} \Rightarrow \text{besitzt konv. Teilfolge} \\
\quad \hookrightarrow \text{Existenz limsup / liminf}
\end{array}
$$

VI. Die Exponentialfunktion

· Def. (Exponentialfunktion): $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$

· Def. (Euler'sche Zahl e): $e = \exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in [2,3]$

1) <u>Reelle Exponentialfunktion</u>: $\forall x \in \mathbb{R}: \exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \wedge \exp(x)$ str. mon., bij., stetig : $\forall x,y \in \mathbb{R}: \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

· Bew.: a) Konvergenz: Vorbemerkung $x > 0: \frac{x}{(n+1)(n+x)} \leq \frac{x+n}{(n+1)(x+n)} \leq 1 \rightarrow a_{n,x} := \frac{-x}{(n+1)(n+x)} \geq -1$

$x < 0$: Obiges, wenn $n > -x$

Nun gilt: $\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot$

$\left(\frac{n^2+nx+n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(1+a_{n,x}\right)^{n+1}$

$\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \frac{n+x}{n}\left(1+(n+1)a_{n,x}\right) = \frac{n+x}{n}\left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = 1 \rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \langle a_n \rangle_n$ mon. st.

Beschränktheit: $\exists N_x \forall x \leq 0 \forall n \geq N_x: \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mid n \geq N_x\right\}$

$\forall x \geq 0 \forall n \geq N_x: \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1 \rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ $\in (0,1]$

$\to 0 \le (1+\frac{x}{n})^n \le \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n} \to (1+\frac{x}{n})^n$ beschr. $\xrightarrow{+\text{mon.}}$ Konv.

· Weitere Beweise folgen in folgenden Unterkapiteln.

ii) Inversionsformel von $\exp(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

· Bew.: $\exp(x)\cdot\exp(-x) = (1-\frac{x^2}{n^2})^n =: b_n$; $1-\frac{x^2}{n} = 1-(\frac{x^2}{n^2})n \overset{\text{Bern.}}{\le} (1-\frac{x^2}{n^2})^n \le 1$

$\to 1 = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{x^2}{n} \le \lim (1-\frac{x^2}{n^2})^n \le 1 \xrightarrow{\text{Sandwich}} \lim (1-\frac{x^2}{n^2})^n = 1 \to \exp(-x) = \exp($

iii) Additionsformel: $\forall x,y: \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

· Bew.: $x=0 \lor y=0$ ✓; $x \ne 0 \ne y$: $(c_n)_n := -(x^2+y^2) - xy + xy\frac{x+y}{n}$; $(1-\frac{x}{n})(1-\frac{y}{n})(1+\frac{x+y}{n}) =$

$= 1 + \frac{c_n}{n^2}$; $\exp(x+y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{c_n}{n^2}}{(1-\frac{x}{n})^n(1-\frac{y}{n})^n} \overset{ii)}{=} \exp(x)\exp(y)\cdot\lim_{n\to\infty} 1+\frac{c_n}{n^2}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1(x^2+xy+y^2)}{n^2} + \frac{xy(x+y)}{n^3} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n^2} \to \lim_{n\to\infty} 1+\frac{c_n}{n^2} = 1 \to$ Aussage

iv) Stetigkeit: $\forall x_0 \forall \varepsilon>0 \exists \delta \forall x \in \mathbb{R}: |x_0-x|<\delta \to |\exp(x_0)-\exp(x)| < \varepsilon$

· Bew.: St. bei $x_0 = 0$: $\delta := \min\{\varepsilon, 1-\frac{1}{1+\varepsilon}\}$; $x \in (-\delta, 0]$: $1-\varepsilon \le 1-\delta < 1+x \le \exp(x) \le 1$

$x \in [0,\delta)$: $1+\varepsilon \ge \frac{1}{1-\delta} \ge \exp(x) \ge 1 \to$ St.

St. bei x_0 bel.: $h: x \mapsto x - x_0$ St. bei x_0; $g: y \mapsto \exp(y)$ St. bei $y = 0 = h(x_0)$;

$f: z \mapsto a\cdot\exp(z)$ St. bei $1 = g(0) = g(h(x_0)) \xrightarrow{\text{Verk. St. Fkt.}} \exp(x)$ St. bei x_0 bel.

v) Strenge Monotonie: $\forall x,y \in \mathbb{R}: x<y \to \exp(x)<\exp(y)$ $\to \exp(x)$ st.

· Bew.: $\underset{x>0:}{\exp(0)} = 1 < 1+x \le \exp(x)$ $\to \forall x,y: x<y: \exp(y) \overset{\text{Add.(iii)}}{=} \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$

vi) Surjektivität: $\forall z \exists y: z = \exp(y)$

· Bew.: $y>0$: $y < 1+y \le \exp(y) \land (\frac{1}{y} < \exp(\frac{1}{y}) \to y > \exp(\frac{1}{y})^{-1} = \exp(-\frac{1}{y}))$

$\xrightarrow{\text{ZWS}} \exists x \in (-\frac{1}{y}, y): \exp(x) = y \to$ Surj.

VII. Der Logarithmus und Potenzen

· Def.: $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} := \exp^{-1}$

i) Der natürliche Logarithmus: $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist str. mon. w., st., bij. Fkt mit $\log(a\cdot b) = \log(a) + \log(b)$

· Bew.: Umkehrsatz

· Def. (Potenzen): $x^a := \exp(a\log(x))$

ii) Rechenregeln für Potenzen

a) $\log(x^a) = \log(\exp(a\cdot\log(x))) = a\cdot\log(x)$

b) $\underline{x^a x^b} \overset{\text{Def.}}{=} \exp(a \cdot \log(x)) \exp(b \cdot \log(x)) \overset{\text{Add.}}{=} \exp((a+b) \cdot \log(x)) = \underline{x^{a+b}}$

c) $\underline{(x^a)^b} = \exp(b \cdot \log(\exp(a \cdot \log(x)))) = \exp(b \cdot a \cdot \log(x)) = \underline{x^{ab}}$

III) Obere Schranke des Logarithmus : $\forall \alpha > 0 \, \forall x > 0 \, \exists C_\alpha : \log(x) \leq C_\alpha x^\alpha$

· Bew.: Wähle $C_\alpha = \max\{1, \frac{1}{\alpha}\}$. $\alpha \geq 1 \to C_\alpha = 1 \to C_\alpha \exp(\alpha \cdot \log(x)) \geq x \geq \log(x)$
$0 < \alpha < 1 \to C_\alpha = \frac{1}{\alpha} \to C_\alpha \exp(\alpha \log(x)) \geq \frac{1}{\alpha} + \log(x) \geq \log(x)$

VIII. Grenzwerte von Funktionen

· Def. (lim einer Fkt.): $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ist lim von $f(x)$ für x gegen $x_0 \iff$ $[f: D \to \mathbb{R}]$
$\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - A| < \varepsilon$

· lim einer Fkt erfüllt gewohnte Eigenschaften:
a) Linearität $[\forall f, g \in \mathcal{F}(D): \lim_{x \to x_0} (sf + tg) = s \cdot \lim_{x \to x_0}(f) + t \cdot \lim_{x \to x_0}(g)$, wenn existent$]$
b) Multiplikativität $[\forall f, g \in \mathcal{F}(D) : \lim_{x \to x_0} f \cdot g = \lim_{x \to x_0} f \cdot \lim_{x \to x_0} g$, wenn existent$]$
c) Monotonie $[\forall f, g \in \mathcal{F}(D) : f \leq g : \lim_{x \to x_0} f \leq \lim_{x \to x_0} g]$
d) Sandwich-Lemma

I) Grenzwert und Stetigkeit : $\forall f \in \mathcal{F}(D) \, \forall x \in D \subseteq \mathbb{R}$: f st. bei $x_0 \iff f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

· Bew.: „$\to$": f st. bei $x_0 \to \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
„$\leftarrow$": $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \to \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \to f$ st. bei x_0

· Def. (Hebbare Unstetigkeitsstelle): $x_0 \in D$ hebb. USS $\iff \lim_{x \to x_0} f(x)$ exist. $\wedge \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
Ersatzfunktion (stetig): $f_{neu} := \begin{cases} f(x) & | \; x \in D \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & | \; x = x_0 \end{cases}$

II) Folgen als Argumente : $\forall f \in \mathcal{F}(D) \, \forall (x_n)_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$, falls existent

· Bew.: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \, \forall x_n \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$: –"–

III) Grenzwerte unter Verknüpfungen : $\forall f : D \to E, g : E \to \mathbb{R}$ bei y_0 st. $\forall x_0 \in D : x_0$ HP $\forall y_0 \in E : y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

· Bew.: $(a_n)_n : \lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \to \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
$\to \lim_{n \to \infty} g(f(a_n)) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

· Def. (Uneigentliche Grenzwerte) : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:
$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ (+) $\vee$ $f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$ (−)

· Def. (Punktierte δ-Umgebung): $\dot{U}_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

· Def. (Links- und Rechtsseitiger Grenzwert):

a) rechtsseitiger HP: x_0 ist rs. HP $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: (x_0, x_0+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

b) rechtss. Grenzwert: $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ ist rs. GW $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \, \forall x \in D \cap (x_0, x_0+\delta): |f(x) - \lim_{x \searrow x_0} f(x)| < \varepsilon$

c) linksseitiger HP: x_0 ist ls. HP $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: (x_0-\varepsilon, x_0) \cap D \neq \emptyset$

d) linkss. Grenzwert: $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ ist ls. GW $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \in D \cap (x_0-\delta, x_0): |f(x) - \lim_{x \nearrow x_0} f(x)| < \varepsilon$

e) Grenzwert: $\forall x_0$ ls $\wedge$ rs HP: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ exist. $\Leftrightarrow \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$

· Def. (Linksseitige & Rechtsseitige Stetigkeit):

a) Linksseitige Stetigkeit: $\forall x_0$ ls. HP: f ls. st. bei $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$

b) Rechtsseitige Stetigkeit: $\forall x_0$ rs. HP: f rs. st. bei $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

· Def. (Sprungstelle): x_0 ist SS $\Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \searrow x_0} f(x) \wedge \exists \lim_{x \nearrow x_0} f(x), \lim_{x \searrow x_0} f(x)$

· Def. (Bewegung ins Unendliche): $\forall f \in \mathcal{F}(D): \forall \delta \, (\frac{1}{\delta}, \infty) \cap D \neq \emptyset: A = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in (\frac{1}{\delta}, \infty): |f(x) - A| < \varepsilon$

IX. Riemann - Summen

· Def. (Riemann Summe): $\forall f \in \mathcal{F}([a,b]) \, \forall \mathfrak{Z} = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$ Zerlegung $\forall \vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in [a,b]^n$

$x_{i-1} \leq z_i < x_i: \quad R(f, \mathfrak{Z}, \vec{z}) := \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$

· Def. (Maschenweite): $\forall \mathfrak{Z}$ Zerl.: $|\mathfrak{Z}| := \max_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1}) \quad [x_k \in \mathfrak{Z}]$

I) Riemann - Integral über Riemann - Summen: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \mathfrak{Z} \, \forall \vec{z}: |\mathfrak{Z}| < \delta \Rightarrow |R(f, \mathfrak{Z}, \vec{z}) - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$

· Bew.: $\forall o \in O, u \in U: o \geq R(f, \mathfrak{Z}, \vec{z}) \geq u \xrightarrow[\text{R-intb.}]{\text{Sandw.}} \inf(O) = R(f, \mathfrak{Z}, \vec{z}) = \sup(U) \to$ Aussage

II) Vektorwertige Integrale

· Def. (Vektorwertiges Integral): $f: [a,b] \to \mathbb{R}^d; \quad R(f, \mathfrak{Z}, \vec{z}) := \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$

· Def. (R-Intbarkeit von Vw. Int.): $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x))^t$ R-intb. $\Leftrightarrow f_i(x)$ R-intb. $\{i \leq n, \in \mathbb{N}\}$

$\int_a^b \vec{f}(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_n(x)\,dx\right)^t$

III) Dreiecksungleichung vektorwertiger Integrale: $\vec{f} \in {}^{D}\mathbb{R}_d$ st. $\xrightarrow{D=[a,b]} \|\vec{f}\|_2$ R-intb. $\wedge \|\int_a^b \vec{f}(x)\,dx\|_2 \leq \int_a^b \|\vec{f}(x)\|_2$

· Bew.: f st. $\xrightarrow{\text{Komp. St.}} f_i$ st. $[i \in \mathbb{N}_{\leq n}] \xrightarrow{\text{Multi.}} f_i^2$ st. $\xrightarrow{\text{Add.}} \sum f_i^2$ st. $\xrightarrow{\text{Verk.}} \sqrt{\sum f_i^2}$ st. $\to \sqrt{\sum f_i^2}$ R-intb.

X. Landau Notation

· Def. („Gross-O"): Sei $D \subseteq \mathbb{R}$; $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ HP; $f, g \in \mathcal{F}(D)$. $f(x) = O(g(x))$ [für $x \to x_0$] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \, \exists M > 0 \, \forall x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0): |f(x)| \leq M \cdot |g(x)|$

Bsp.: · $\frac{x}{x+1} = O(1)_{x \to \infty}$

· $\forall x_0 \in \mathbb{R}: \; x^2 = O(x)_{x \to x_0}$

· aber (!): $x^2 \neq O(x)_{x \to \infty}$

· Def. („Klein-o"): $f(x) = o(g(x))_{x \to x_0} \Leftrightarrow \forall x \in D \cap \dot{U}_\delta(x_0) \, \forall \varepsilon \, \exists \delta : |f(x)| \leq \varepsilon \, |g(x)|$

bzw. für $g(x) \neq 0$: $f(x) = o(g(x))_{x \to x_0} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Bsp.: · $x = o(x^2)_{x \to \infty}$ $\quad (x^2 \overset{!}{\neq} o(x)_{x \to \infty})$

· $x^2 = o(x)_{x \to 0}$ $\quad (x \overset{!}{\neq} o(x^2)_{x \to 0})$