D–MATH

Prüfung Analysis II: mehrere Variablen

401-1262-07L

Bitte noch nicht umblättern!

Rechnungen

1. **[4 Punkte]** Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Für welches Paar $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ wird das Integral $\int_B (x-s)^2 + (y-t)^2 \, d\mathrm{vol}(x,y)$ minimal?

2. **[4 Punkte]** Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfelds $(x,y,z) \mapsto (x, y, z - x^2 - y^2)$ durch die obere Halbsphäre $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0\}$ von innen nach aussen.

3. **[4 Punkte]** Gegeben sei das ebene Dreieck $D \subset \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $A = (2,0,0)$, $B = (0,2,0)$ und $C = (0,0,3)$. Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds $f\colon (x,y,z) \mapsto (z,x,y)$ entlang des Randes von D, sodass die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge durchlaufen werden.

4. **[4 Punkte]** Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Theorie aus der Vorlesung

5. (a) **[2 Punkte]** Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.
   (b) **[4 Punkte]** Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

6. (a) **[2 Punkte]** Wann heisst eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $m, n \geq 1$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar?
   (b) **[4 Punkte]** Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, so ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Multiple-Choice

Sie müssen in jeder Aufgabe in diesem Teil vier Aussagen zu einem Thema beurteilen und als Wahr (also in jedem Fall zutreffend) oder Falsch (Gegenbeispiele existieren) kennzeichnen. Bei vier richtigen Antworten in der Aufgabe erhalten sie 3 Punkte für die Aufgabe, bei drei richtigen Antworten (und einer falsch beantworteten oder unbeantworteten Frage) 2 Punkte, und ansonsten 0 Punkte. Die **Fragen finden Sie auf dem Antwortblatt**, und dort müssen Sie auch Ihre Antwort machen, aber nicht begründen. Markieren Sie deutlich, welche der Aussagen **wahr** sind. Es können jeweils 0-4 Aussagen wahr sein.

Beweise und Anwendungen der Theorie

11. **[4 Punkte]** Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Vektorfeld. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [0,1] \to \partial B$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes, so gilt

$$\int_B \det(D_x f) \, d\mathrm{vol}(x) = \int_0^1 (f_1 \circ \gamma)(f_2 \circ \gamma)' \, dt = -\int_0^1 (f_1 \circ \gamma)'(f_2 \circ \gamma) \, dt.$$

12. Es seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) **[3 Punkte]** Zeigen Sie: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$\tfrac{1}{p} a^p + \tfrac{1}{q} b^q \geq ab \quad \text{(Young-Ungleichung).}$$

(b) **[3 Punkte]** Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$. Folgern Sie aus (a): Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \quad \text{(Hölder-Ungleichung).}$$

Hinweis: Nehmen Sie zuerst $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ an. Sie können Teil (b) auch beantworten, wenn Sie (a) nicht gelöst haben.